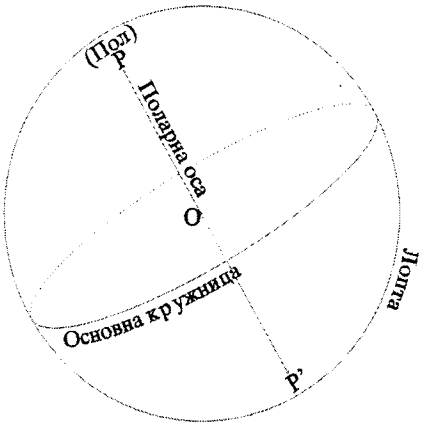
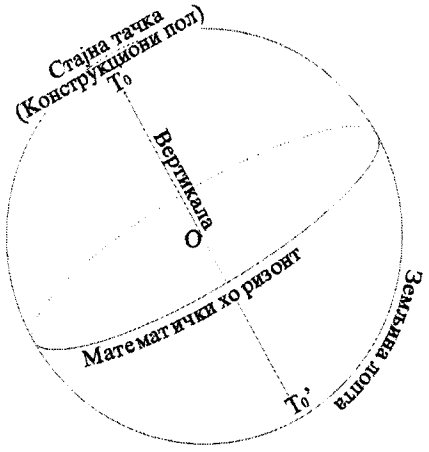
Милутин Тадић[1]

ОДРЕЂИВАЊЕ МАТЕМАТИЧКОГ ХОРИЗОНТА

Увод

Права која садржи дијаметар сфере, а нормална је на раван било које кружнице на сфери назива се *поларном осом* те кружнице (Сл.1). Поларна оса (PP') продире сферу у тачкама које се називају *полови кружнице* (P, P'). Јасно да су полови уједно и сферни центри одговарајућих кружница. (Да би их разликовали потребно је лук задане велике кружнице претходно оријентисати). За задане полове одговарајућа велика кружница се назива *основна* или *поларна кружница.*





На Земљиној лопти свакој *стајној тачки* T_0 (φ_0,λ_0) (и њој антиподној тачки T_0') припада основна кружница која се назива *математички хоризонт* (Сл.1). Вертикала (T_0T_0') стајне тачке представља поларну осу математичког хоризонта. У математичкој картографији се конструкција мрежа у азимутним пројекцијама везују за једну стајну тачку ("додирну" тачку) која се зато назива *конструкциони пол,* а њена вертикала - *конструкциона оса.* Тако гледајући, математички хоризонт је основна кружница датог конструкционог пола на Земљиној лопти.

У азимутним пројекцијама, с изузетком гномонске, математички хоризонт конструкционог пола картографске мреже приказује се као кружница, ограничавајући приказ једне Земљине полулопте. Једино код ових пројекција математички хоризонт се може лако геометријски конструисати, само на основу познавања положаја конструкционог пола. У свим другим пројекцијама математички хоризонт

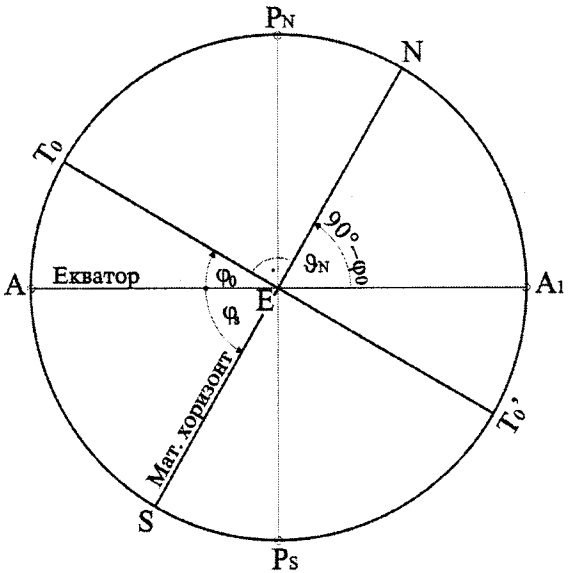
---

[1] Др Милутин Тадић, ванредни професор, Географски факултет, Београд.

се може конструисати само ако је он претходно егзактно одређен на самој Земљиној лопти. То је искључиво задатак математичке географије.

1. Екстремне тачке математичког хоризонта

Уопште гледајући, велика кружница је одређена са две недијаметралне тачке на лопти. То важи и за сваку велику кружницу на Земљиној лопти, па тако и за математички хоризонт. Разлика је у томе да се на Земљиној лопти велике кружнице посматрају у оквиру географског координатног система. Тако се код сваке велике кружнице се разликују четири екстремне тачке, најсевернија (N) и најјужнија (S), - темена велике кружнице, те најисточнија (E) и најзападнија (W), - тачке пресека са екватором.



На сл. 2. приказан је меридијански пресек Земљине лопте кроз конструкциони пол T_0 (φ_0, λ_0). На слици је P_NP_S Земљина ротациона оса, AA_1 екватор, T_0T_0' конструкциона оса и QQ_1 математички хоризонт; S је најужнија, E најисточнија и N најсевернија тачка математичког хоризонта. Географске координате екстремних тачака математичког хоризонта лако је изразити преко географских координата конструкционог пола (Таб. 1).

Табела. 1. Географске координате екстремних тачака математичког хоризонта

Тачка	N	S	E	W
φ	$90°-\varphi_0$	$\varphi_0-90°$	0°	0°
λ	$\lambda_0-180°$	λ_0	$\lambda_0+90°$	$\lambda_0-90°$

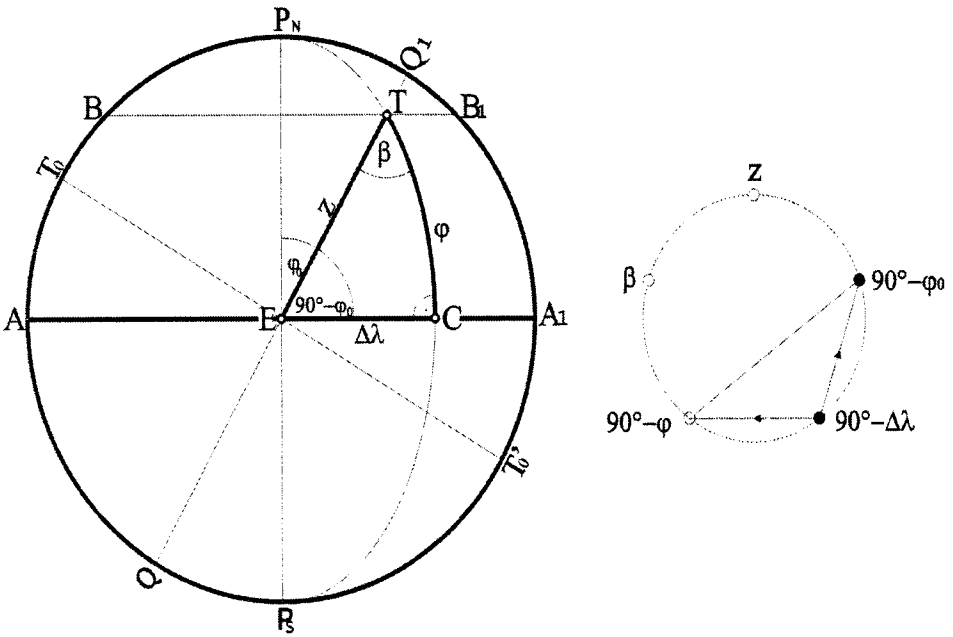
Екстремним тачкама је потпуно одређен положај математичког хоризонта на Земљиној лопти. Он је, на пример, велика кружница која пролази кроз тачке $E(\varphi_E=0°, \lambda_E=\lambda_0+90°)$ и $N(\varphi_N=90°-\varphi_0, \lambda_N=\lambda_0-180°)$, или велика кружница која пролази кроз тачку E $(\varphi_E=0°, \lambda_E=\lambda_0+90°)$, под азимутом $\alpha=\varphi_0$. Али поменуте четири тачке нису довоне да се на неку картографску мрежу уцрта математички хоризонт датог конструкционог пола. За то је потребно одредити положаје довољног броја међутачака математичког хоризонта на Земљиној лопти, - најбоље пресека са линијама географске координатне мреже.

2. Пресеци математичког хоризонта са линијама географске координатне мреже

Сада се задатак своди на стандардан облик: Одредити географске координате тачака пресека са меридијанима и паралелама, велике кружнице која пролази кроз тачку $E(\varphi_E=0°,\lambda_E=\lambda_0+90°)$ под географским азимутом $\alpha=\varphi_0$ (Сл.3).

2.1 Пресеци с меридијанима

На сл.3 математички хоризонт QQ_1 пресеца задани меридијан P_NCP_S у тачки T (φ, λ). Сферни тоугао ECT је правоугли, са страницом $ES=\Delta\lambda=\lambda-(\lambda_0+90°)$.



Према Неперовом правилу следи,

$$\cos(90° - \Delta\lambda) = ctg(90° - \varphi_0)ctg(90° - \varphi),$$

одакле је,

$$tg\varphi = \sin\Delta\lambda ctg\varphi_0,$$

односно, после уврштавања $\Delta\lambda=\lambda-(\lambda_0+90°)$,

$$tg\varphi = -\cos(\lambda - \lambda_0)ctg\varphi_0 \quad ..... (1)$$

2.2 Пресеци с паралелама

На сл. 3. математички хоризонт пресеца задану паралелу BB_1 у тачки T (φ, λ). Из истог правоуглог сферног троугла , по Неперовом правилу, следи,

$$\sin\Delta\lambda = tg\varphi_0 tg\varphi,$$

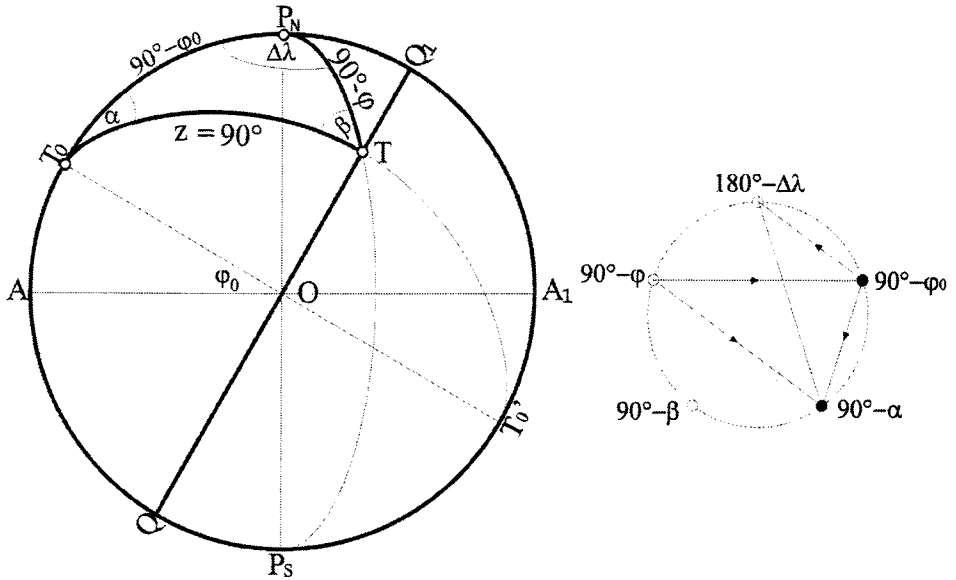
односно,

$$\cos(\lambda - \lambda_0) = -tg\varphi_0 tg\varphi \quad ..... (2)$$

Према обрасцима (1) и (2) није тешко одредити географске координате потребног броја тачака математичког хоризонта, а потом исте превести у правоугле координате, према обрасцима важећим за картографску пројекцију на чију се мрежу жели нанети тај математички хоризонт. Пресечне тачке математичког хоризонта са меридијанима или паралелама (или и са једним и са другим) су неравномерно распоређене на самом математичком хоризонту, на земљиној лопти.

3. Пресеци математичког хоризонта са вертикалима

Равномерно распоређене тачке математичког хоризонта добијају се као његови пресеци са вертикалима конструкционог пола, - секундарним кружницама математичког хоризонта, - повученим у једнаком распону азимута. За то је потребно решити задатак који гласи: Одредити географске координате (φ, λ) пресека T математичког хоризонта чији је конструкциони пол $T_0(\varphi_0, \lambda_0)$, са његовим вертикалом заданог географског азимута α (Сл.4).



На сл.4, математички хоризонт QQ_1 конструкционог пола T_0 сече вертикал T_0T_0' у тачки $T(\varphi, \lambda)$. У сферном троуглу T_0P_NT страница T_0T је једнака $\pi/2$, тј. овај троугао је квадрантни, па, према Неперовом правилу, следи,

$$\cos(90° - \varphi) = \sin(90° - \varphi_0)\sin(90° - \alpha),$$

то јесте,

$$\sin\varphi = \cos\varphi_0 \cos\alpha \quad \text{..... (3)}$$

Према истом правилу, даље следи,

$$\cos(90° - \varphi_0) = ctg(90° - \alpha)ctg(180° - \Delta\lambda),$$

одакле је,

$$tg\Delta\lambda = -\frac{tg\alpha}{\sin\varphi_0} \quad \text{..... (4)}$$

с тим да је, на крају, $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$.

4. Одређивање конструкционог пола задатог математичког хоризонта

Може се појавити и потреба да се за познати математички хоризонт одреди конструкциони пол. Задатак би гласио: Одредити географске координате тачке $T_0(\varphi_0, \lambda_0)$, чији математички хоризонт пролази кроз тачке $T_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $T_2(\varphi_2, \lambda_2)$.

Математички хоризонт се може дефинисати као скуп тачака чија је сферна удаљеност од конструкционог пола z=90°. То важи и за тачке T_1 и T_2 математичког хоризонта ($z_1=z_2=90°$), па се, према обрасцу (2) може написати,

$$tg\varphi_0 = \frac{\sin\Delta\lambda_1}{tg\varphi_1} = \frac{\sin\Delta\lambda_2}{tg\varphi_2},$$

односно,

$$\frac{\sin[(\lambda_1-\lambda_0)-90°]}{tg\varphi_1} = \frac{\sin[(\lambda_2-\lambda_0)-90°]}{tg\varphi_2}.$$

Напише ли се ова једначина као,

$$\frac{tg\varphi_2}{tg\varphi_1} = \frac{\cos(\lambda_2-\lambda_0)}{\cos(\lambda_1-\lambda_0)},$$

па онда на десној страни растави косинус разлике углова, и бројилац и именилац поделе са $\cos\lambda_0$, она поприма облик,

$$\frac{tg\varphi_2}{tg\varphi_1} = \frac{\cos\lambda_2 + tg\lambda_0\sin\lambda_2}{\cos\lambda_1 + tg\lambda_0\sin\lambda_1},$$

односно,

$$tg\varphi_2 tg\lambda_0\sin\lambda_1 - tg\varphi_1 tg\lambda_0\sin\lambda_2 = tg\varphi_1\cos\lambda_2 - tg\varphi_2\cos\lambda_1,$$

одакле је, коначно,

$$tg\lambda_0 = \frac{tg\varphi_1\cos\lambda_2 - tg\varphi_2\cos\lambda_1}{tg\varphi_2\cos\lambda_1 - tg\varphi_1\cos\lambda_2} \quad \text{..... (5)}$$

Решавањем обрасца (5) добијају се две вредности λ_0, међусобно различите за 180°. Када је одређено λ_0,φ_0 одређује се на основу обрасца (2), као,

$$tg\varphi_0 = -\frac{\cos(\lambda_1-\lambda_0)}{tg\varphi_1} = -\frac{\cos(\lambda_2-\lambda_0)}{tg\varphi_2} \quad \text{..... (6)}$$

с тим да постоје два решења различитог предзнака ($\varphi_{0'} = -\varphi_0$).

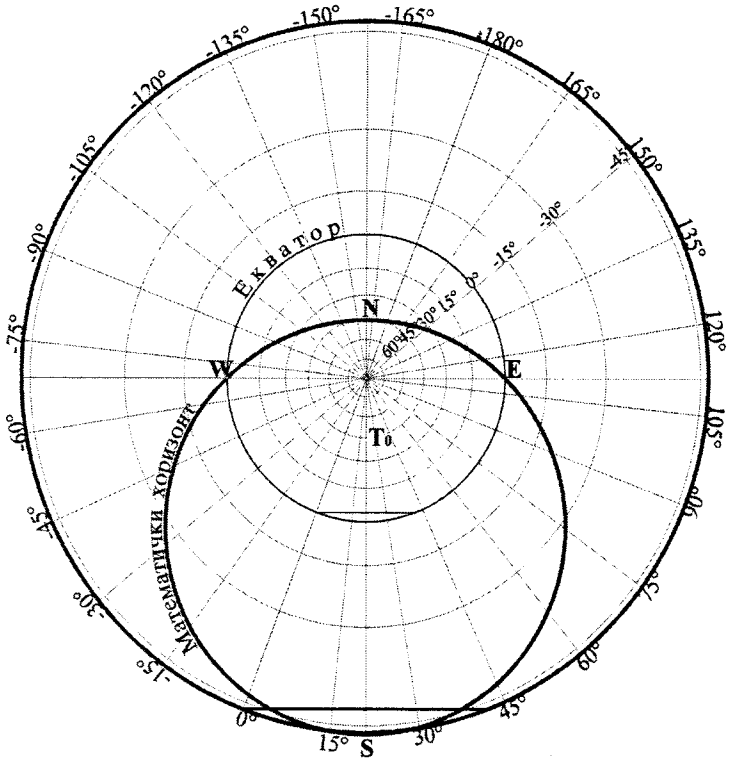
5. Математички хоризонт за средишњу тачку територије СРЈ

И на крају, као пример, биће одређен математички хоризонт за средишњу тачку територије СРЈ, т.ј. за тачку која се налази у центру поља географске координатне мреже, у кога се, без остатка, уклапа цела територија СРЈ. То је тачка, -

конструкциони пол T_0 са заокруженим координатама φ_0=44° и λ_0=21° (*Тадић М. 1997*).

Пре него, према изведеним обрасцима, буду одређени одговарајући пресеци математичког хоризонта са изабраним линијама координатне мреже на Земљиној лопти, корисно је размотрити и питање графичког решења, т.ј. питање најповољнијег картографског приказа математичког хоризонта задатог конструкционог пола. Када се математички хоризонт прикаже у изабраној пројекцији, онда се са картографске мреже, на основу измерених поларних или правоуглих координата, могу одредити географске координате тражених пресечних тачака, или, - ако та тачност није довољна, - картографски приказ може послужити за очигледну проверу тачности вредности добивених аналитичким путем.

Као и код сваког картографског приказа, прво треба направити избор пројекције. У овом случају то ће, наравно, бити једна из групе азимутних перспективних пројекција, јер се у њима математички хоризонт приказује као кружница. Све се ове пројекције појављују у три облика, - као поларне, екваторске или хоризонтске, - од којих је картографска мрежа првих (конструкциона мрежа) најједноставнија за конструкцију. У овом суженом избору одмах отпадају гномонска (не може се приказати једна полулопта) и ортографска (не може се приказати више од једне полулопте), тако да остаје само поларна стереографска пројекција (Сл. 5).



На сл.5 је приказан математички хоризонт конструкционог пола $T_0(\varphi_0=44°$ и $\lambda_0=21°)$ на мрежи поларне стереографске пројекције, конструисане са густином картографске мреже од $\Delta\varphi=\Delta\lambda=15°$. На цртежу су назначене све пресечне тачке математичког хоризонта са меридијанима и паралелама; свакој од њих се могу одредити географске координате, знајући да је $\delta=\lambda$ и $\rho = 2Rtg(45° - \frac{\varphi}{2})$.

Са математичким хоризонтом приказаним на поларној стереографској картографској мрежи може се приступити одређивању географских координата пресечних тачака, уз могућност очигледне контроле тачности добиваних резултата. Према обрасцу (1) одређени су пресеци с меридијанима (Таб.2), према обрасцу (2) пресеци с паралелама (Таб.3), и према обрасцима (3) и (4) пресеци с вертикалима (Таб.4).

Табела 2. Геогр. ширине тачака у којима математички хоризонт конструкционог пола $T_0(\varphi_0=44°$ и $\lambda_0=21°)$ сече меридијане на сваких 10° географске дужине.

λ°	φ°	λ°	φ°	λ°	φ°	λ°	φ°
-180	44.03	-90.00	20.36	0.00	-44.03	90	-20.36
-170	45.47	-80.00	11.18	10.00	-45.47	100	-11.18
-160	46.00	-70.00	1.04	20.00	-46.00	110	-1.04
-159	46.00	-69.00	0.00	21.00	-46.00	111	0.00
-150	45.65	-60.00	-9.20	30.00	-45.65	120	9.20
-140	44.40	-50.00	-18.63	40.00	-44.40	130	18.63
-130	42.17	-40.00	-26.66	50.00	-42.17	140	26.66
-120	38.83	-30.00	-33.09	60.00	-38.83	150	33.09
-110	34.19	-20.00	-38.01	70.00	-34.19	160	38.01
-100	28.07	-10.00	-41.59	80.00	-28.07	170	41.59
-90	20.36	0.00	-44.03	90.00	-20.36	180	44.03

Табела 3. Геогр. дужине тачака у којима математички хоризонт конструкционог пола $T_0(\varphi_0=44°$ и $\lambda_0=21°)$ сече паралеле на сваких 5° географске ширине.

φ°	λ_1°	λ_2°	φ°	λ_1°	λ_2°
-46	21.00	21.00	0	111.00	-69.00
-45	36.05	5.95	5	115.85	-73.85
-40	56.87	-14.87	10	120.80	-78.80
-35	68.45	-26.45	15	126.00	-84.00
-30	77.11	-35.11	20	131.58	-89.58
-25	84.24	-42.24	25	137.76	-95.76
-20	90.42	-48.42	30	144.89	-102.89
-15	96.00	-54.00	35	153.55	-111.55
-10	101.20	-59.20	40	165.13	-123.13
-5	106.15	-64.15	45	-174.05	-143.95
0	111.00	-69.00	46	-159.00	-159.00

Табела 4. Геогр. координате тачака у којима математички хоризонт конструкционог пола $T_0(\varphi_0=44°$ и $\lambda_0=21°)$ сече вертикале на сваких 15° географског азимута.

α°	φ°	λ°	α°	φ°	λ°
0	46.00	-159.00	180	-46.00	21.00
15	44.01	179.91	195	-44.01	-0.09
30	38.53	161.27	210	-38.53	-18.73
45	30.57	145.79	225	-30.57	-34.21
60	21.08	132.85	240	-21.08	-47.15
75	10.73	121.54	255	-10.73	-58.46
90	2.52	111.00	270	-7.57	-69.00
105	-10.73	100.46	285	10.73	-79.54
120	-21.08	89.15	300	21.08	-90.85
135	-30.57	76.21	315	30.57	-103.79
150	-38.53	60.73	330	38.53	-119.27
165	-44.01	42.09	345	44.01	-137.91
180	-46.00	21.00	360	46.00	-159.00

На основу података из претходних табела могуће је тачно уцртати математички хоризонт на било којој географској карти света, без обзира у којој је картографској пројекцији урађена.

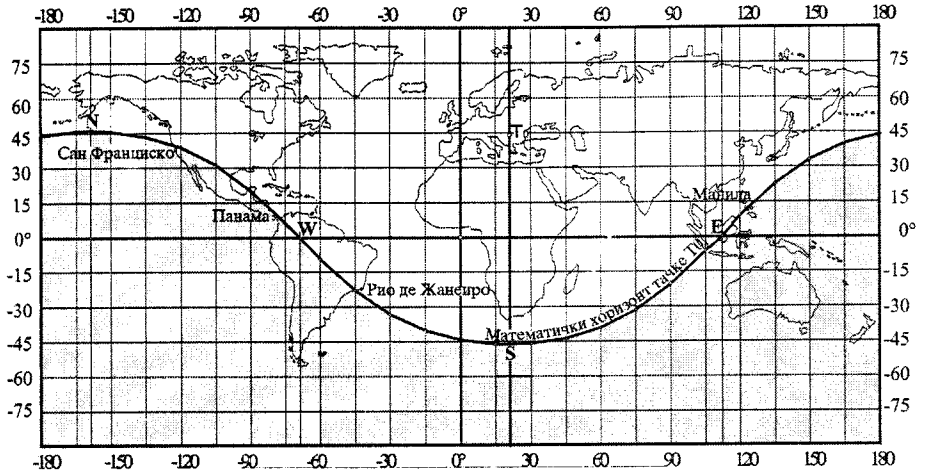
Закључак

Положај математичког хоризонта заданог конструкционог пола на Земљиној лопти може се одредити географским координатама тачака његовог пресека са линијама координатне мреже географског или хоризонтског сферног координатног система, - са меридијанима, паралелама, или вертикалима. Тако се задатак своди на класичне задатке математичке географије (*Тадић М., 1996*). Сви потребни обрасци су дати у табели 5.

Табела 5. Обрасци за одређивање пресека математичког хоризонта са линијама коодинатне мреже на Земљиној лопти.

Пресек са:	Задато	Тражи се	Образац
Меридијанима	$\varphi_0, \lambda_0, \lambda$	φ	$tg\varphi = -\cos(\lambda-\lambda_0)ctg\varphi_0$
Паралелама	$\varphi_0, \lambda_0, \varphi$	λ_1, λ_2	$\cos(\lambda-\lambda_0) = -tg\varphi_0 tg\varphi$
Вертикалима	$\varphi_0, \lambda_0, \alpha$	φ, λ	$\sin\varphi = \cos\varphi_0\cos\alpha$ $tg\Delta\lambda = -\frac{tg\alpha}{\sin\varphi_0}$
	$T_1(\varphi_1, \lambda_1)$ $T_2(\varphi_2, \lambda_2)$	φ_0, λ_0	$tg\lambda_0 = \frac{tg\varphi_1\cos\lambda_2 - tg\varphi_2\cos\lambda_1}{tg\varphi_2\cos\lambda_1 - tg\varphi_1\cos\lambda_2}$ $tg\varphi_0 = -\frac{\cos(\lambda_1-\lambda_0)}{tg\varphi_1} = -\frac{\cos(\lambda_2-\lambda_0)}{tg\varphi_2}$

На основу географских координата могуће је одредити поларне или правоугле координате истих тачака у било којој картографској пројекцији (наравно према обрасцима важећим за ту пројекцију) и ограничити хемисферу датог конструкционог пола на било којој географској карти, као што је то, на пример, према подацима из табеле 1, урађено на карти света урађеној у квадратној пројекцији (Сл. 6), за конструкциони пол $T_0(\varphi_0=44°$ и $\lambda_0=21°$.



У картографији се јавља и обрнут задатак, да се за задату велику кружницу одреди конструкциони пол. Конкретно, то би могао бити задатак да се одреди конструкциони пол пројекције у којој ће бити приказана Земљина полулопта, ограничена математичким хоризонтом који пролази кроз, на пример, најјужније тачке Јужне Америке и Африке. Потребни обрасци су дати на крају табеле 5.

Потреба за решавањем наведених задатака не јавља се само у картографији. Она постоји и у астрономији, тачније - у сферној астрономији. Када су познате координате неке тачке (небеског тела) на небеској сфери, онда се она може по вертикали спустити на Земљину лопту, а потом се, посматрањем исте као конструкционог пола, може одредити њен математички хоризонт. Одређењем математичког хоризонта ограничена је Земљина полулопта са које је дато небеско тело у том тренутку видљиво, скуп тачака (сам математички хоризонт) за чије хоризонте то небеско тело у том тренутку излази или залази, положај терминатора (када је у питању Сунце)... и т.д.

Литература

Тадић М. (1996): *Математичка географија са гномоником.* АБЦ графика, Београд.

Тадић М. (1997): *Математичко-географски положај СР Југославије и Републике Српске.* Зборник радова Географског семинара, Приштина.